PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE - 2010

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

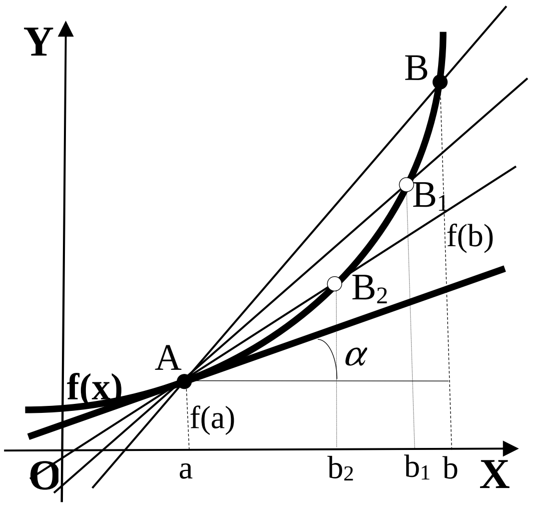
PROPUESTA A

1º) a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+sen\ x}{2x-x^2} & si\ \ x<0 \\ bx+c & si\ \ 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{1+x} & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$, determina los parámetros a, b, c ε R para que f(x) sea una función continua en x = 0, y además sea continua y derivable para x = 1.

----

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b\to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a)=y'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a α (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

<u>la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.</u>

b)

Una función es continua en un punto cuando son iguales sus límites por la izquierda y por la derecha del punto y, además, coincide con el valor de la función en ese punto.

$$Para\ \ x=0\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+sen\ x}{2x-x^2}=\underline{\dfrac{a+1}{2}}\quad (*)\\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(bx+c)=\underline{c}=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{c=\frac{a+1}{2}}.$$

$$(*)\quad \lim_{x\to 0}\frac{ax+sen\ x}{2x-x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a+\cos\ x}{2-2x}=\underline{\frac{a+1}{2}}.$$

$$Para\ \ x=1\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(bx+\dfrac{a+1}{2}\right)=\underline{\dfrac{a+2b+1}{2}}\\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x}=\underline{\dfrac{1}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a+2b+1}{2}=\frac{1}{2}\ \ ;;$$

$$a+2b+1=1\ ;;\ a+2b=0\ ;;\ \underline{b=-\frac{a}{2}}.$$

$$Para\ \ x=1\Rightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{ll}-\dfrac{ax}{2}+\dfrac{a+1}{2} & si\ \ x<1\\ \dfrac{1}{1+x} & si\ \ x\ge 1\end{array}\right.\ ;;\ \ f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{2}(-ax+a+1) & si\ \ x<1\\ \dfrac{1}{1+x} & si\ \ x\ge 1\end{array}\right..$$

Para que la función sea derivable para x = 1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$Para \quad x=1 \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}a & si \quad x<1 \\ \frac{-1}{(1+x)^2} & si \quad x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=-\frac{1}{2}a \\ f'(1^+)=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}.$$

$$c=\frac{a+1}{2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\underline{\underline{\frac{3}{4}=c}} \quad ;; \quad b=-\frac{a}{2}=-\frac{\frac{1}{2}}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}=b}}.$$

****

2º) a) Determina el dominio de la función $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

b) Calcula la integral definida $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\cdot dx$.

----

a)

El dominio de la función $f(x)=\sqrt{2x+1}$ es el conjunto de valores reales de x que hacen que $2x+1\geq 0$.

$$2x+1\geq 0\ \ ;;\ \ 2x\geq -1\ \ ;;\ \ \underline{x\geq -\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow\left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right)}}$$

b)

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\cdot dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}\cdot dx\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l|c} 2x+1=t & x=0\rightarrow t=1 \\ dx=\frac{1}{2}dt & x=-\frac{1}{2}\rightarrow t=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ I=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{t}\ dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}}\ dt=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left[t\sqrt{t}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(1\sqrt{1}-0\right)=\underline{\underline{\frac{1}{3}=I}}.$$

****

3º) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿Para qué valores de $\lambda \in R$ existe la matriz inversa de M?

b) Para $\lambda = 0$ resuelve, si es posible, la ecuación X · M = 2F, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

----

a)

Para que una matriz tenga inversa en condición necesaria que su determinante sea distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9\lambda - 4 + 2\lambda^2 + 6 - \lambda^2 + 12\lambda = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \;\;;;\;\; \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -2} \;\;;;\;\; \underline{\lambda_2 = -1}.$$

$$\underline{\underline{M \;\; es \;\; inversible \;\; \forall \lambda \in R, \;\; \{\lambda \neq -2, \;\; \lambda \neq -1\}}}$$

b)

Multiplicando por la derecha por M^{-1} los dos términos de la ecuación $X \cdot M = 2F$ resulta:

$$X \cdot M \cdot M^{-1} = (2F) \cdot M^{-1} \;\;;;\;\; X \cdot I = (2F) \cdot M^{-1} \;\;;;\;\; \underline{X = (2F) \cdot M^{-1}} \;\; .$$

Para $\lambda = 0$ es $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$. $M^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

$$Adj \;\; M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 12 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Sustituyendo el valor de M^{-1} en la expresión obtenida de X:

$$X = (2F) \cdot M^{-1} = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix} = X}}\ .$$

****

4º) Dado el punto P(0, 0, 1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula la distancia desde el punto P a la recta r.

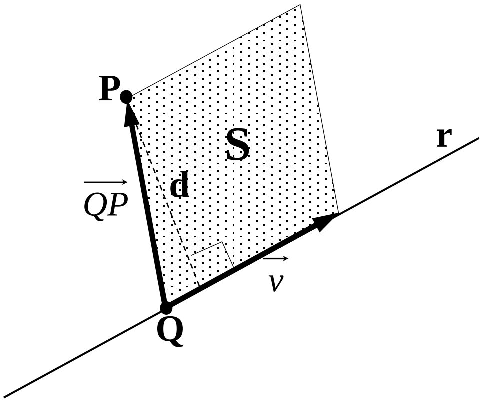
b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a la recta r.

----

a)

La distancia del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta un punto Q de r y el vector $\overrightarrow{v}$, director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{QP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

El punto Q puede ser, por ejemplo: Q(1, 1, 1).

El vector director de r es el producto vectorial de los dos vectores normales de los planos que determinan la recta, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 0)$:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = j - k - k + i = i + j - 2k = \underline{(1,\ 1,\ -2) = \overrightarrow{v}} \ .$$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 1,\ 1) - (0,\ 0,\ 1) = (1,\ 1,\ 0)$.

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\left|-2j + k - k + 2i\right|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\left|2i - 2j\right|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{12}}{6} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \ unidades = d(P,\ r)}}.$$

b)

El haz de planos perpendiculares a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv x + y - 2z + D = 0$, de los cuales, el plano π que contiene al punto P(0, 0, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv x+y-2z+D=0 \\ P(0,\ 0,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow -2+D=0\ \ ;;\ \ D=2\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv x+y-2z+2=0}.$$

El punto N de corte de r y π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \pi \equiv x+y-2z+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x=y\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x+x+z=3 \\ x+x-2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3-z=2z-2\ \ ;;\ \ 3z=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{z=\frac{5}{3}}\ \ ;;\ \ 2x+z=3\ \ ;;\ \ 2x+\frac{5}{3}=3\ \ ;;\ \ 6x+5=9\ \ ;;\ \ 6x=4\ \ ;;\ \ 3x=2\ \Rightarrow\ \underline{x=y=\frac{2}{3}}.$$

El punto de corte de r y π es $N\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$.

El vector director de la recta r puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PN}=N-P=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)-(0,\ 0,\ 1)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$; por ejemplo, el vector $\overrightarrow{w}=(1,\ 1,\ 1)$.

La recta s expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases},\ \ \forall \lambda \in R}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Dada la función definida por $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante.

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba $(\cup)$ y cóncava hacia abajo $(\cap)$.

----

a)

$$f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}=3x^2(x-6)-1=3x^3-18x^2-1.$$

$$\underline{\underline{f(x)=3x^3-18x^2-1}}$$

b)

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$$f'(x)=9x^2-36x \;\;;;\;\; f''(x)=18x-36=18(x-2)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=2}\,.$$

$f'''(x)=18\neq 0 \;\Rightarrow\;$ Punto de inflexión para x = 2.

$$f(2)=3\cdot 2^3-18\cdot 2^2-1=24-72-1=24-73=-49 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I.\;:\;A(2,\,-49)}}.$$

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=2}\,.$$

Por ser f(x) continua en su dominio, que es R, el valor 2 divide el dominio en dos intervalos alternativos de concavidad y convexidad; para diferenciarlos damos a x un valor sencillo, por ejemplo x = 0, para el cual es $f(0)=-1 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Cóncavidad}\;\;(\cap)}$.

$$\underline{\underline{\textit{Concavidad}\;\;(\cap)\;\Rightarrow\;(-\infty,\;2)}}\;\;;;\;\;\underline{\underline{\textit{Convexidad}\;\;(\cup)\;\Rightarrow\;(2,\;+\infty)}}$$

****

2º) Calcula la integral indefinida: $I=\int x\cdot Lx\cdot dx$.
(Nota: Lx representa el logaritmo neperiano de x)

$$I=\int x\cdot Lx\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} u=Lx\rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ x\cdot dx=dv\rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ I=Lx\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot Lx-\frac{1}{2}\int x\cdot dx=\frac{x^2}{2}\cdot Lx-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\underline{\underline{\frac{x^2}{4}(2Lx-1)+C=I}}$$

****

3º) a) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in R$ el sistema $\begin{cases} 2x + y + \lambda z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = -3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 3\lambda + 2\lambda - 6 - 1 = 5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \lambda \neq 2 \Rightarrow Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 3 = n^o \;\; incógnitas \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

$$Para \;\; \lambda = 2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; A' = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \lambda = 2 \Rightarrow Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 2 < n^o \;\; incógnitas \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

b)

Resolvemos el sistema para λ = -3 que es compatible determinado utilizando la regla de Cramer. El sistema es $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{5 \cdot (-3) - 5} = \frac{10 - 60}{-25} = \frac{-50}{-25} = \underline{\underline{2 = x}} \;\; ;; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-25} = \frac{-30 - 20}{-25} = \frac{-50}{-25} = \underline{\underline{2 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix}}{5 \cdot (-3) - 5} = \frac{-40 - 10}{-25} = \frac{-50}{-25} = \underline{\underline{2 = z}}$$

****

4º) Consideremos los planos $\pi \equiv ax+by+3z=c$, $\pi' \equiv 2x-y+z=3$ y la recta dada por ecuaciones implícitas $r \equiv \begin{cases} 2x+3z=0 \\ y+2z=-4 \end{cases}$.

a) Determina los parámetros $a,\ b \in R$ para que los planos π y π’ sean paralelos.

b) Para los valores a y b obtenidos, estudia la posición relativa del plano π y la recta r en función de $c \in R$.

----

a)

Dos planos dados por sus ecuaciones generales son paralelos cuando tienen proporcionales sus respectivos coeficientes.

Los planos π y π’ son paralelos cuando se cumpla que: $\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{3}{1}$, de donde se deducen los valores pedidos, que son: $\underline{\underline{a=6}}$ y $\underline{\underline{b=-3}}$.

b)

El plano π resulta ser $\pi \equiv 6x-3y+3z=c$.

La posición relativa entre la recta y el plano en función de c se deduce del estudio del sistema que forman, que es $\left.\begin{array}{r} 2x+3z=0 \\ y+2z=-4 \\ 6x-3y+3z=c \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 3 & c \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M’ = 3 $\rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M’ = 2 $\rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M’ son los siguientes:

$$Rango\ \ M \ \Rightarrow \ |M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}=6-18+12=0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M=2}.$$

En función de c el rango de M' es el siguiente:

$$\left.\begin{cases} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & c \end{vmatrix} = 2c - 24 = 2(c-12) = 0 \Rightarrow \underline{c = 12} \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 6 & 3 & c \end{vmatrix} = 4c - 72 + 24 = 4c - 48 = 4(c-12) = 0 \Rightarrow \underline{c = 12} \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & c \end{vmatrix} = 36 - 3c = 3(12-c) = 0 \Rightarrow \underline{c = 12} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Para\ \ c = 12 \ \rightarrow \ \underline{Rango\ \ M' = 2} \\ Para\ \ c \neq 12 \ \rightarrow \ \underline{Rango\ \ M' = 3} \end{cases}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ c = 12 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 \ \Rightarrow La\ \ recta\ \ r\ \ está\ \ contenida\ \ en\ \ el\ \ plano\ \ \pi}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ c \neq 12 \Rightarrow Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3 \Rightarrow a\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ paralelos}}$$

****